Aufgabe 2 Blatt 6
Beweisen Sie die folgende Version des IRT: Sei $M \in (0,\infty]$ und $X \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$ unabhängige ZG, so dass für ein $\vartheta > 0$

(IRT2-1) $\mathbb{E}|M|^{-\vartheta} = 1$,

(IRT2-2) $\mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log^{-}|M| < \infty$,

(IRT2-3) Die Verteilung von $\mathbb{P}(\log|M| \in \cdot \mid |M| < \infty)$ nicht-arithmetisch ist, d.h. insbesondere $\mathbb{P}(|M| = 1) < 1$.

Dann ist $0 < \mathbb{E}\log|M| \leq \infty$, $0 < \mu_\vartheta := -\mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log|M| < \infty$ und die folgenden Behauptungen gelten: Falls

$$\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(MX \leq t)\right| t^{-1-\vartheta}\, dt \;<\; \infty$$

bzw.

$$\int_0^\infty \left|\mathbb{P}(X \geq -t) - \mathbb{P}(MX \geq -t)\right| t^{-1-\vartheta}\, dt \;<\; \infty,$$

dann gilt

$$\lim_{t\to 0} t^{-\vartheta}\,\mathbb{P}(0 < X \leq t) \;=\; C_+,$$

bzw.

$$\lim_{t\to 0} t^{\vartheta}\,\mathbb{P}(-t \leq X < 0) \;=\; C_-,$$

wobei C_+ und C_- gegeben sind durch

$$C_+ \;:=\; \frac{1}{\mu_\vartheta}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(X \leq t) - \mathbb{P}(MX \leq t)\big)\, t^{-1-\vartheta}\, dt,$$

$$C_- \;:=\; \frac{1}{\mu_\vartheta}\int_0^\infty \big(\mathbb{P}(X \geq -t) - \mathbb{P}(MX \geq -t)\big)\, t^{-1-\vartheta}\, dt.$$

Loesung: Wende das IRT auf $\widetilde{M} := M^{-1} \geq 0$ und $\widetilde{X} := X^{-1}$ an. Prüfe die Vorausetzungen:

(IRT-1) $\mathbb{E}|\widetilde{M}|^{\vartheta} = 1$ nach (IRT2-1)

(IRT-2) Nach IRT2-1) ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\widetilde{M}|^{\vartheta}\log^{+}|\widetilde{M}| =& \mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log(|\widetilde{M}|)\mathbf{1}_{\{|\widetilde{M}|\geq 1\}}\\ =& \mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\mathbf{1}_{\{M\leq 1\}}(-\log(M)) = \mathbb{E}|M|^{-\vartheta}\log^{-}|M| < \infty\end{aligned}$$

IRT-3) Folgt aus (IRT2-3).

Demnach gilt

$-\infty \leq \mathbb{E}\log\widetilde{M}| < 0$, was äquivlanet zu $0 < \mathbb{E}\log|M| \leq \infty$ ist. Außerdem folgt

$$0 < \mathbb{E}|\widetilde{M}|^{\vartheta} \log|\widetilde{M}| = -\mathbb{E}|M|^{-\vartheta} \log|M| =: \mu_{\vartheta} < \infty.$$

Mit Substitution $s = t^{-1}$ folgt:

$$\infty > \int_0^\infty |\mathbb{P}(X \le t) - \mathbb{P}(MX \le t)| t^{\vartheta-1} t^{-1-\vartheta} dt = \int_{-\infty}^0 |\mathbb{P}(X \le \frac{1}{s}) - \mathbb{P}(MX \le \frac{1}{s})| \big(\frac{1}{s}\big)^{-1-\vartheta} \frac{1}{-s^2} ds$$

$$= \int_0^\infty |\mathbb{P}(\widetilde{X} \ge s) - \mathbb{P}(\widetilde{M}\widetilde{X} \ge s| s^{\vartheta-1} ds$$

Letzteres enspricht der Bedingung (4.3) aus dem IRT. [Bemerkung: da die Verteilungsfunktion, sowie *Tail*-Funktion abzählbar viele Sprungstellen besitzt und wir nach dem Lebesgue-Integral integrieren, ist egal, ob dort $\le$ oder $<$ steht] Ähnlcih zeigt man $\widetilde{X}_+ = C_+$ wie in der Aufgabenstellung. Das IRT liefert nun

$$C_+ = \lim_{s\to\infty} s^{\vartheta} \mathbb{P}(\widetilde{X} > s) = \lim_{s\to\infty} s^{\vartheta} \mathbb{P}(\widetilde{X} \ge s) = \lim_{s\to\infty} s^{\vartheta} \mathbb{P}(0 < X \le \frac{1}{s}) = \lim_{t\to 0} t^{-\vartheta} \mathbb{P}(0 < X \le t).$$

Analog folgt der C_--Teil. $\square$